Examen Final, MATE 3171, 1er semestre 2014-2015, SOLUCIONES

Nombre:_________________________________ # estudiante:___________________
Profesor:_________________________________ # sección:________

Tiene 90 minutos para resolver el examen. Apague su teléfono celular. El uso de calculadora científica está permitido. Incluya explicaciones y justicaciones pertinentes con sus respuestas. ¡Buena suerte!

1. (10 puntos) Factorice las siguientes expresiones:
(a) $a^3 + 27 = (a+3)(a^2 - 3a + 9)$

(b) $3x^3+5x^2-6x-10 = 3x^3-6x+5x^2-10 = 3x(x^2-2)+5(x^2-2) = (3x+5)(x^2-2) = (3x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

2. (10 puntos) Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

(a) $2|3-x|+5 = 9 \Leftrightarrow |3-x| = 2 \Leftrightarrow 3-x = 2$ *ó* $3-x = -2$. Por tanto, las soluciones son $x = 1$ y $x = 5$.

(b) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+8} = \sqrt{x-4}+2 \Rightarrow x+8 = x-4+4\sqrt{x-4}+4 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow 4 = x-4$. Sustituyendo en la ecuación original verificamos que la única solución es $x = 8$.

3. (6 puntos) A una mujer se le pregunta que edad tiene. La mujer contesta: mi edad hace 20 años sería la mitad de mi edad dentro de 5 años a partir de hoy. ¿Cuál es la edad de la mujer?

Sea x la edad de la mujer hoy en años. Entonces $x - 20 = (x+5)/2 \Leftrightarrow 2x - 40 = x + 5 \Leftrightarrow x = 45$. Por tanto, la mujer tiene 45 años de edad.

4. (8 puntos) (a) Halle la ecuación de la recta que cruza el eje x por 5 y el eje y por 8.

La recta pasa por (5,0) y por (0,8). Por lo tanto la pendiente es $m = \frac{8-0}{0-5} = -\frac{8}{5}$. La recta está dada por $y = 8 - \frac{8}{5}x$.

(b) Sea $f(x) = 2/x$. Halle la razón de cambio promedio de f en el intervalo $[x, x+h]$.

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2}{x+h}-\frac{2}{x}}{h} = \frac{2x-2(x+h)}{h(x+h)x} = \frac{-2h}{h(x+h)x} = \frac{-2}{(x+h)x}$ si $h \neq 0$.

5. (8 puntos) (a) Evalúe $F(-4)$, $F(-2)$, $F(0)$, y $F(2)$, si $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

$F(-4) = -4$, $F(-2) = -2$, $F(0) = 1$, $F(2) = 4$.

(b) Encuentre una fórmula que relacione T y s: T es directamente proporcional a la raíz cúbica de s y $T = 3$ cuando $s = 8$.

$T = c\sqrt[3]{s}$, $3 = c\sqrt[3]{8} = 2c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, $T = \frac{3}{2}\sqrt[3]{s}$.

6. (8 puntos) (a)Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1/x$. Evalúe cada una de las siguientes: (i) $f(g(4))$ (ii) $g(f(1/16))$ (iii) $f(f(16))$ (iv) $g(g(2))$.

(i) $f(g(4)) = f(1/4) = 1/2$ (ii) $g(f(1/16)) = g(1/4) = 4$ (iii) $f(f(16)) = f(4) = 2$ (iv) $g(g(2)) = g(1/2) = 2$.

(b) Sea $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Utilice composición de funciones para verificar que f es su propia inversa.

$f \circ f(x) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x$. Por lo tanto, f es su propia inversa.

7. (8 puntos) (a) Si $f(x) = |x|$ exprese cada una de las siguientes como una transformación de f y establezca cómo su gráfica puede obtenerse a partir de la gráfica de f. (i) $|x| - 1$ (ii) $|x-1| + 2$

(i) $f(x) - 1$. La gráfica se obtiene trasladando la gráfica de f una unidad hacia abajo.
(ii) $f(x-1)+2$. La gráfica se obtiene trasladando la gráfica de f una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia arriba.

(b) Encuentre una fórmula para cada una de las siguientes transformaciones a la gráfica de $f(x)$: (i) Estiramiento vertical por un factor de 2 y luego traslación de la función resultante 2 unidades arriba. (ii) Traslación 2 unidades arriba y luego estiramiento vertical de la función resultante por un factor de 2.

(i) $2f(x)+2$, (ii) $2(f(x)+2) = 2f(x)+4$

8. (8 puntos) (a) Encuentre el valor máximo y mínimo de $f(x) = x^2 - 8x + 21$ en el intervalo $[1, 5]$.

Completando el cuadrado, $y = (x-4)^2 + 5$. Por tanto, el valor mínimo es 5 (en $x = 4$) y el máximo es 14 (en $x = 1$).

(b) Juan ganó la lotería y quiere ahorrar para la educación de su hijo de 5 años de edad. ¿Cuánto debe depositar Juan en un certificado de educación que paga 5.25% de interés anual para que tenga un valor de $100,000 cuando su hijo tenga 18 años?

Juan tiene 13 años para lograr el ahorro. Si el principal el P, el ahorro es $P(1.0525)^{13} = 100,000$. Por tanto, $P = \frac{100{,}000}{1.0525^{13}} = 51,417.7$.

9. (8 puntos) (a) La siguiente tabla representa a una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b(ax)$, halle $f(18)$.

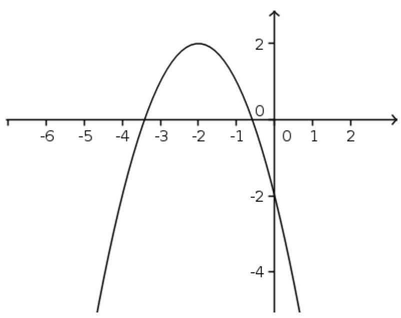
x	2	6
$f(x)$	1	2

$f(2) = \log_b(2a) = \log_b(2) + \log_b(a) = 1$
$f(6) = \log_b(6a) = \log_b(2) + \log_b(3) + \log_b(a) = 2$
Restando:
$f(6) - f(2) = \log_b(3) = 1$
Por tanto, $f(18) = \log_b(18a) = \log_b(6a) + \log_b(3) = 2 + 1 = 3$

(b) La función $f(t) = e^t$ se puede expresar en la forma $f(t) = 2^{kt}$. Encuentre el valor de k.

$2^{kt} = e^{\ln 2^{kt}} = e^{k\ln(2)t}$. Por tanto, $k\ln(2) = 1$, es decir, $k = \frac{1}{\ln(2)}$.

10. (10 puntos) (a) Use su conocimiento de simetrías y transformaciones para graficar la función polinómica $y = 2 - (x+2)^2$.



(b) Determine los ceros reales de la función dada y su multiplicidad: $g(x) = (2x+5)^3(x^2+2x+2)(x-5)^2$.

Un cero de multiplicidad 3 en $-\frac{5}{2}$, un cero de multiplicidad 2 en 5 y como $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, ese factor no contribuye más raices reales.

11. (10 puntos) (a) Para la siguiente función polinómica se dan uno o más de sus ceros. Encuentre todos los ceros de la función: $g(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$; 2 y -4 son ceros.

Como 2 y -4 son ceros, $(x-2)(x+4) = x^2+2x-8$ es factor. Es decir, $x^3+7x^2+2x-40 = (x^2+2x-8)(x+5)$. Así que el último cero es -5.

(b)Encuentre todos los ceros reales del siguiente polinomio: $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 8x - 10$.

Buscando ceros racionales $\frac{p}{q}$, tenemos que $p = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10$ y $q = \pm1, \pm2, \pm4$. Haciendo división sintética vemos que $-\frac{5}{4}$ es cero: $\begin{array}{rrrrr} -\frac{5}{4} & 4 & 5 & -8 & -10 \\ & & -5 & 0 & 10 \\ & 4 & 0 & -8 & 0 \end{array}$. Es decir, $P(x) = 4x^3+5x^2-8x-10 = (x+\frac{5}{4})(4x^2-8) = 4(x+\frac{5}{4})(x^2-2)$. Por tanto, los otros cero reales son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

12. (10 puntos) (a) Escriba la siguiente expresión en la forma $a+bi$: $\frac{4+2i}{-3+2i}$.

$\frac{4+2i}{-3+2i} = \frac{4+2i}{-3+2i}\frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{1}{13}(-8-14i) = -\frac{8}{13} - \frac{14}{13}i$.

(b) Encuentre un polinomio P con coeficientes enteros que satisfaga las siguientes condiciones: P es de grado 4, y tiene ceros en $-2i$, -1 y 2.

$P(x) = (x+1)(x-2)(x-2i)(x+2i) = (x+1)(x-2)(x^2+4)$.