Examen Final, MATE 3171, 2do semestre 2014-2015, SOLUCIONES

Nombre:___________________________________ # estudiante:____________________
Profesor:___________________________________ # sección:________

Tiene 120 minutos para resolver el examen. Apague su teléfono celular. El uso de calculadora científica está permitido. Incluya explicaciones y justicaciones pertinentes con sus respuestas. ¡Buena suerte!

1. (10 puntos) Factorice las siguientes expresiones completamente:

(a) $(x^2+8)^2 - 36x^2 = (x^2+8+6x)(x^2+8-6x) = (x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$

(b) $x^3 - 6x^2 - 7x = x(x^2-6x-7) = x(x-7)(x+1)$

2. (10 puntos) Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

(a) $\sqrt{2x+15} - 6 = x \Rightarrow 2x+15 = (x+6)^2 \Leftrightarrow x^2+10x+21 = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x+3) = 0$

Sustituyendo en la ecuación original, vemos que solo $x = -3$ es solución.

(b) $|x^2+3x-2| = 2$

Equivale $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) = 0$ ó $x^2+3x = x(x+3) = 0$. Por tanto $x = -4, -3, 0, 1$.

3. (6 puntos) La suma de dos números consecutivos impares es 164. ¿Cuáles son esos números?

$(2n+1)+(2n+3) = 164 \Leftrightarrow 4n+4 = 164 \Leftrightarrow n = 40$. Por tanto los números son 81 y 83.

4. (8 puntos) (a) Dado que $h(x) = 1/x$, encuentre $h(1/x)$, $h(2x)$ y $\frac{h(x+c)-h(x)}{c}$.

$h(1/x) = x$, $h(2x) = 1/(2x)$ y $\frac{h(x+c)-h(x)}{c} = \frac{\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x}}{c}$.

(b) Sea $f(x) = x^2$. Halle la razón de cambio promedio de f en el intervalo $[x, x+h]$. ¿Será $f(x)$ una función lineal?

Razón: $\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$ si $h \neq 0$. No es lineal, pues la razón de cambio promedio no es constante.

5. (8 puntos) (a) Evalúe $F(-4)$, $F(-2)$, $F(-1)$, $F(0)$, y $F(2)$, si $F(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ 3+x & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

$F(-4) = -16$, $F(-2) = -4$, $F(-1) = 2$, $F(0) = 3$, y $F(2) = 5$

(b) Encuentre una fórmula que relacione T y s: T es directamente proporcional al cuadrado de s y $T = 3$ cuando $s = 7$.

$3 = 49k$, por tanto $T = \frac{3}{49}s^2$.

6. (8 puntos) (a)Sean $f(x) = 3x^2 - 12$ y $g(x) = 7 - x$. Evalúe cada una de las siguientes: (i) $f(g(2))$ (ii) $g(f(-1))$ (iii) $f(f(2))$ (iv) $g(g(2))$.

(i) $f(g(2)) = f(5) = 75$ (ii) $g(f(-1)) = g(-9) = 16$ (iii) $f(f(2)) = f(0) = -12$ (iv) $g(g(2)) = g(5) = 2$.

(b) Sea $f(x) = 2x + 5$. Encuentre $f(1)$ y $f^{-1}(7)$.

$f(1) = 7$, $f^{-1}(7) = 1$.

7. (8 puntos) (a) Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$ exprese cada una de las siguientes como una transformación de f y establezca cómo su gráfica puede obtenerse a partir de la gráfica de f: (i) $\sqrt[3]{x+1}$, (ii) $1 - \sqrt[3]{x}$.

(i) Desplazamiento a la izquierda de una unidad.

(ii) Reflección con respecto al eje x y desplazamiento hacia arriba de una unidad.

(b) Encuentre una fórmula para cada una de las siguientes transformaciones a la gráfica de $f(x)$: (i) Estiramiento horizontal por un factor de 2 y luego traslación de la función resultante 2 unidades a la izquierda. (ii) Traslación 2 unidades a la izquierda y luego estiramiento horizontal de la función resultante por un factor de 2.

(i) $f(\frac{x}{2} + 2)$

(ii) $f(\frac{x+2}{2})$

8. (8 puntos) (a) Una pelota de béisbol se arroja hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura s alcanzada por la pelota es $s = -16t^2 + 80t + 5$ donde t es el tiempo (en segundos) desde que fue lanzada. Encuentre la altura máxima alcanzada por la pelota.

$s = -16t^2 + 80t + 5 = -16(t - 5/2)^2 + 105$. Por lo tanto, la altura máxima es de 105 pies.

(b) \$1,500 se depositan en una cuenta que paga 4.25 % de intereś anual, compuesto dos veces al año. Encuentre el valor del depósito después de 10 años.

Valor: $\$1,500(1 + 0.0425/2)^{20} = \$2,284.19$

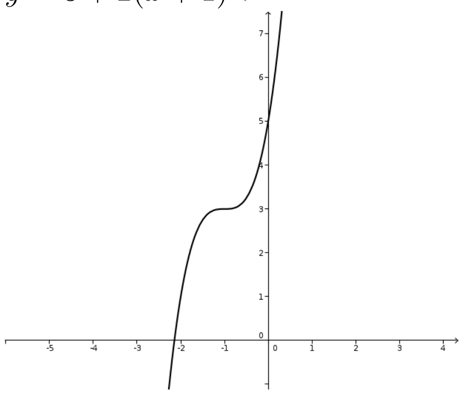
9. (8 puntos) (a) Encuentre las asíntotas, dominio y rango de la función $f(x) = \ln((x + 2)(x - 3))$.

Asíntotas: $x = -2$ y $x = 3$. Dominio: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$. Rango: $(-\infty, \infty)$.

(b) Resuelva la siguiente ecuación exponencial dando la respuesta exacta y al respuesta aproximada con 6 cifras decimales: $4e^{2x} - 2e^x = 12$.

$4e^{2x} - 2e^x - 12 = (2e^x - 4)(2e^x + 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2) \approx 0.693147$.

10. (10 puntos) (a) Use su conocimiento de simetrías y transformaciones para graficar la función polinomial $y = 3 + 2(x+1)^3$.



(b) Determine los ceros reales de la función dada y su multiplicidad: $g(x) = x^4 - 7x^2 + 12$.

$g(x) = x^4 - 7x^2 + 12 = (x^2-3)(x^2-4) = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2)(x+2)$

Así que los ceros son de $-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2$, de multiplicidad uno cada uno.

11. (10 puntos) (a) Encuentre todos los ceros de la función polinómica $g(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 3$ sabiendo que -3 es cero.

$g(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 3 = (x+3)(x^2+4x+1)$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$. Estos son los ceros adicionales.

(b) Encuentre todos los ceros racionales del siguiente polinomio: $P(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$.

Los factores de 8 son 1,2,4,8. Los factores de 3 son 1,3. Así que los posibles ceros racionales son $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm$
Con división sintética o evaluando directamente vemos que $x = \frac{3}{8}$ es el único cero racional.

12. (10 puntos) (a) Escriba la siguiente expresión en la forma $a + bi$: $\frac{i(4+i)}{3-2i}$.

$\frac{i(4+i)}{3-2i} = \frac{-1+4i}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{-11+10i}{13} = -\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$

(b) Halle todos los ceros del polinomio P, dados los ceros indicados: $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, si i es un cero.

Si i es un cero, también lo es $-i$, por ser los coeficientes reales. Por tanto, $P(x) = (x^2+1)(x^2+x-2) = (x^2+1)(x+2)(x-1)$. Por tanto, los ceros son $x = i, -i, -2, 1$.