1er Examen Parcial, MATE 3171, 1er semestre 2014-2015, SOLUCIONES

Nombre:____________________________________ # estudiante:______________________
Profesor:____________________________________ # sección:________

Tiene 90 minutos para resolver el examen. Apague su teléfono celular. El uso de calculadora está prohibido. Incluya explicaciones y justicaciones pertinentes con sus respuestas. ¡Buena suerte!

1. (15 puntos) (a) Evalúe la expresión: $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{16}{25}\right)^{1/2}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} = \frac{125}{64}.$$

(b) Simplifique la expresión: $\left(\frac{-4a^{14}b^{8}}{12a^{17}b^{-2}}\right)^{3}$

$$\left(\frac{-4a^{14}b^{8}}{12a^{17}b^{-2}}\right)^{3} = \left(-\frac{b^{10}}{3a^{3}}\right)^{3} = -\frac{b^{30}}{3^{3}a^{9}}.$$

(c) Simplifique la expresión: $\sqrt[3]{9x}\sqrt[3]{3x^2}$

$$\sqrt[3]{9x}\sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[3]{27x^3} = 3x.$$

2. (20 puntos) Factorice las siguientes expresiones:
(a) $3a^2 + 7a - 6 = (3a-2)(a+3)$

(b) $a^3 + 27 = (a+3)(a^2 - 3a + 9)$

(c) $3x^3+5x^2-6x-10 = 3x^3-6x+5x^2-10 = 3x(x^2-2)+5(x^2-2) = (3x+5)(x^2-2) = (3x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(d) Factorice completamente: $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

3. (20 puntos) Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:
(a) $5x^2 = 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow 5x(x-4) = 0$. Por tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x = 4$.

(b) $4x^2 = 2x - 7 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow (2x - \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{2} = 0$, pero vemos que el lado izquierdo de la ecuación es mayor o igual que $\frac{13}{2}$, por tanto no hay soluciones reales.

(c) $\frac{3}{x+3} = \frac{5}{2x+6} + \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{3}{x+3} - \frac{5}{2x+6} - \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6(x-2)-5(x-2)-2(x+3)}{2(x+3)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x+8}{2(x+3)(x+2)} = 0$. Por tanto, $x = -8$ es la única solución real.

(d) $2|3 - x| + 5 = 9 \Leftrightarrow |3 - x| = 2 \Leftrightarrow 3 - x = 2$ *ó* $3 - x = -2$. Por tanto, las soluciones son $x = 1$ y $x = 5$.

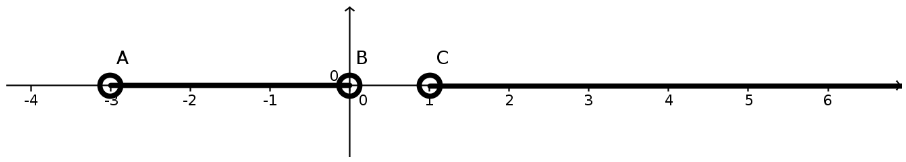
(e) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+8} = \sqrt{x-4} + 2 \Rightarrow x + 8 = x - 4 + 4\sqrt{x-4} + 4 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow 4 = x - 4$. Sustituyendo en la ecuación original verificamos que la única solución es $x = 8$.

4. (9 puntos) A una mujer se le pregunta que edad tiene. La mujer contesta: mi edad hace 20 años sería la mitad de mi edad dentro de 5 años a partir de hoy. ¿Cuál es la edad de la mujer?

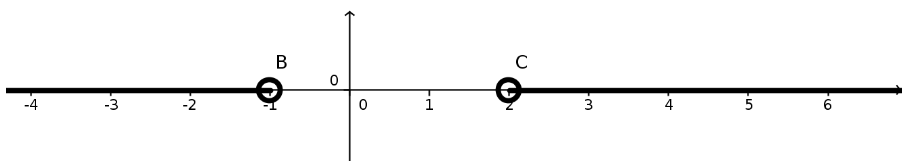
Sea x la edad de la mujer hoy en años. Entonces $x - 20 = (x + 5)/2 \Leftrightarrow 2x - 40 = x + 5 \Leftrightarrow x = 45$. Por tanto, la mujer tiene 45 años de edad.

5. (12 puntos) Resuelva las desigualdades. En cada caso exprese la solución en notación de intervalo e ilustre el conjunto solución en la recta real: (a) $x^3 + 2x^2 - 3x > 0$, (b) $|1 - 2x| > 3$

(a) $x^3 + 2x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow x(x+3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (1, \infty)$,



(b) $|1 - 2x| > 3 \Leftrightarrow (1 - 2x)^2 > 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 8 > 0 \Leftrightarrow 4(x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$



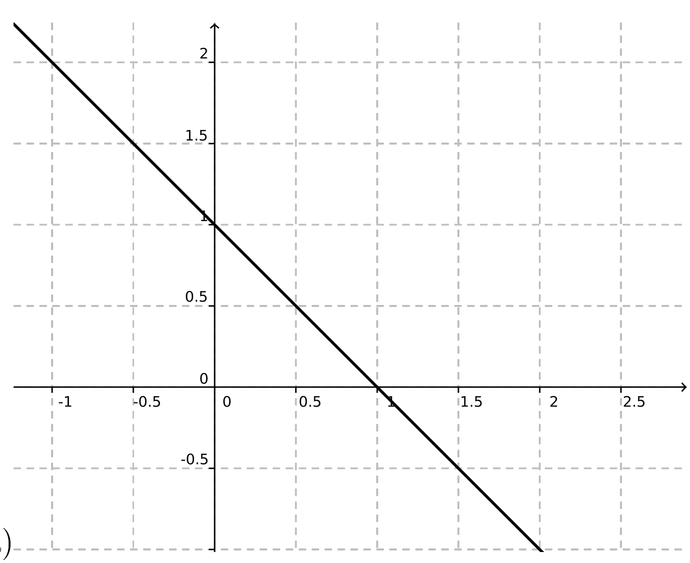
6. (12 puntos) (a) El perímetro de un rectángulo es 20m. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

Sean a y b las longitudes de los lados del rectángulo. Entonces $2a + 2b = 20 \Leftrightarrow a + b = 10$. Por tanto, el área es $A = ab = a(10 - a)$. Así que el área como función de a es $A(a) = a(10 - a)$.

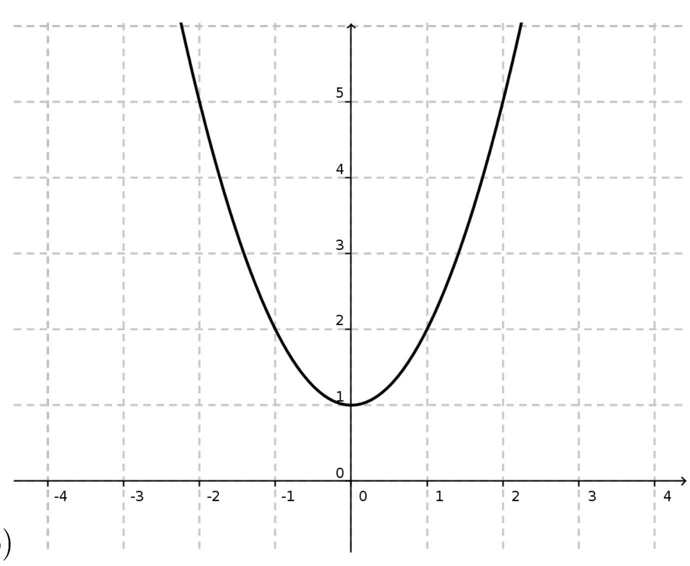
(b) Se define una función h con la fórmula $h(x) = 1/x$. Evalúe $h(1/(x + 1))$.

$h(1/(x + 1)) = 1/(1/(x + 1)) = x + 1$.

7. (12 puntos) Dibuje la gráfica de las siguientes funciones. Haga una tabla de valores, según sea necesario. (a) $f(x) = 1 - x$, (b) $g(x) = x^2 + 1$



(a)



(b)