3er Examen Parcial, MATE 3171, 1er semestre 2014-2015, SOLUCIONES

Nombre:__________________________________ # estudiante:____________________
Profesor:_________________________________ # sección:________

Tiene 90 minutos para resolver el examen. Apague su teléfono celular. El uso de calculadora científica (NO gráfica) está permitido. Incluya explicaciones y justicaciones pertinentes con sus respuestas. ¡Buena suerte!

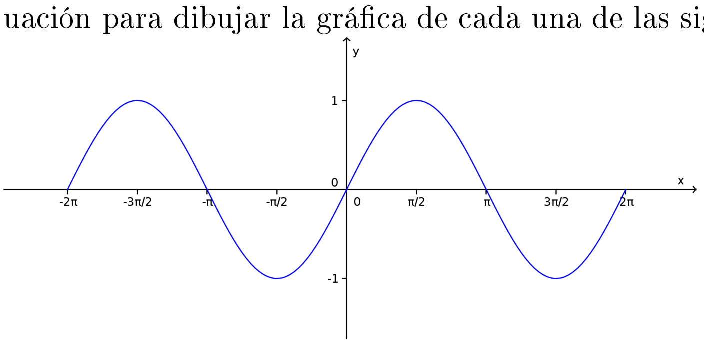
1. (18 puntos) (a) Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Para cada una de las siguientes transformaciones, halle la fórmula que corresponde. (i) Reflexión vertical de la gráfica. (ii) Reflexión horizontal de la gráfica. (iii) Desplazamiento de la gráfica 1 unidad hacia arriba y 2 unidades a la izquierda.

(i) $g(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$
(ii) $g(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$
(iii) $g(x) = g(x) = f(x+2) + 1 = \sqrt{x+2} + 1$

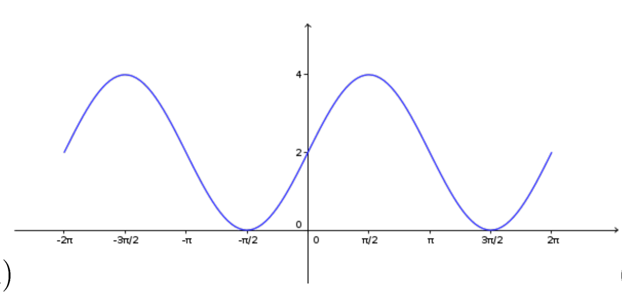
(b) Si $f(x) = |x|$ exprese cada una de las siguientes como una transformación de f y establezca cómo su gráfica puede obtenerse a partir de la gráfica de f. (i) $|x| - 1$ (ii) $|x - 1| + 2$

(i) $f(x) - 1$. La gráfica se obtiene trasladando la gráfica de f una unidad hacia abajo.
(ii) $f(x-1)+2$. La gráfica se obtiene trasladando la gráfica de f una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia arriba.

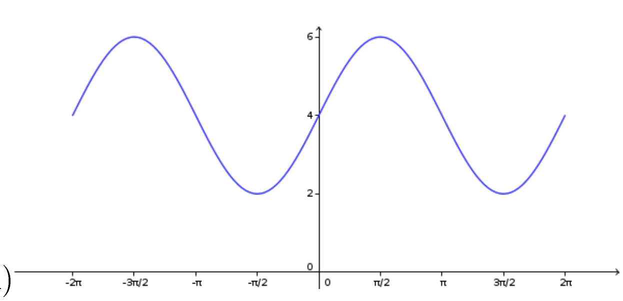
2. (12 puntos) (a) Use la gráfica de la función g en el intervalo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ que se muestra a continuación para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes transformaciones:



(i) Estiramiento vertical por un factor de 2 y luego traslación de la función resultante 2 unidades arriba. (ii) Traslación 2 unidades arriba y luego estiramiento vertical de la función resultante por un factor de 2.



(i)



(ii)

(b) Encuentre una fórmula para cada una de las transformaciones en el problema anterior.

(i) $2f(x)+2$, (ii) $2(f(x)+2)=2f(x)+4$

3. (12 puntos) (a) En cada caso encuentre una fórmula para una parábola que satisface las condiciones dadas: (i) Pasa por el punto (−1,2) con vértice en (3,1). (ii) Máximo 6 con intercepto-x en (0,0) y (4,0).

(i) Vértice: $y=k(x-3)^2+1$, punto: $2=k(-1-3)^2+1 \Rightarrow 1=16k$. Por tanto, $y=\frac{1}{16}(x-3)^2+1$

(ii) Máximo 6: $y=6-k(x-c)^2$. Interceptos-x: implican $y=6-k(x-2)^2$, por estar el máximo entre los interceptos, y $0=6-4k \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$. Por tanto, $y=6-\frac{3}{2}(x-2)^2$.

(b) Encuentre el valor máximo y mínimo de $f(x)=x^2-8x+21$ en el intervalo $[1,5]$.

Completando el cuadrado, $y=(x-4)^2+5$. Por tanto, el valor mínimo es 5 (en $x=4$) y el máximo es 14 (en $x=1$).

4. (12 puntos) (a) Si la tabla representa a la función $f(x)=a\cdot b^x$, halle b.

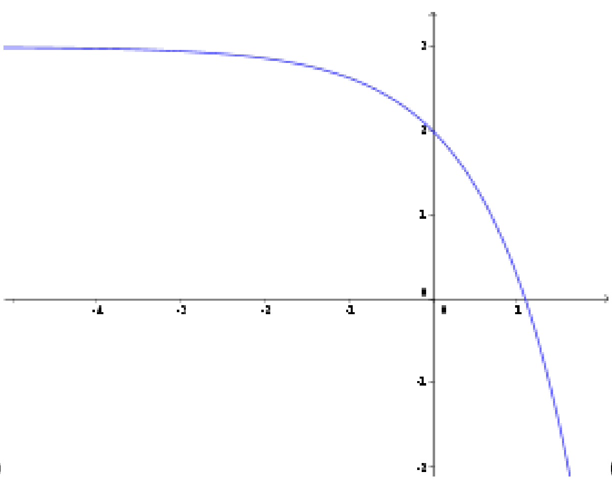
x	1	2	3	4
$f(x)$	54	18	6	2

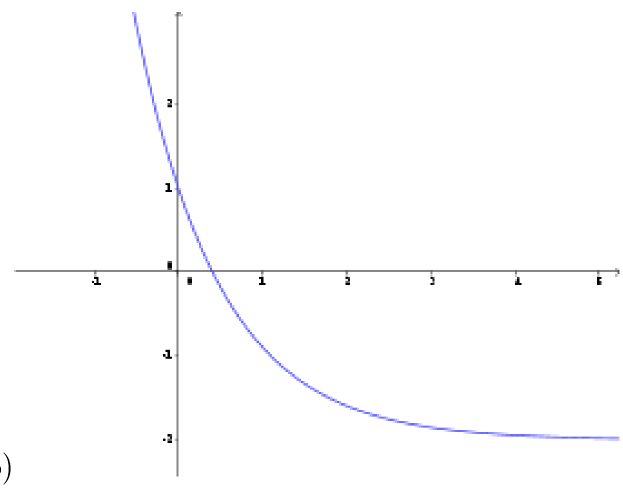
$\frac{f(4)}{f(3)}=\frac{ab^4}{ab^3}=b=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Por tanto, $b=\frac{1}{3}$.

(b) Juan ganó la lotería y quiere ahorrar para la educación de su hijo de 5 años de edad. ¿Cuánto debe depositar Juan en un certificado de educación que paga 5.25% de interés anual para que tenga un valor de \$100,000 cuando su hijo tenga 18 años?

Juan tiene 13 años para lograr el ahorro. Si el principal el P, el ahorro es $P(1.0525)^{13} = 100,000$. Por tanto, $P = \frac{100,000}{1.0525^{13}} = 51,417.7$.

5. (12 puntos) Dibuje la gráfica de las siguientes funciones: (a) $f(x) = -e^x + 3$ (b) $f(x) = 3e^{-x} - 2$


(a)

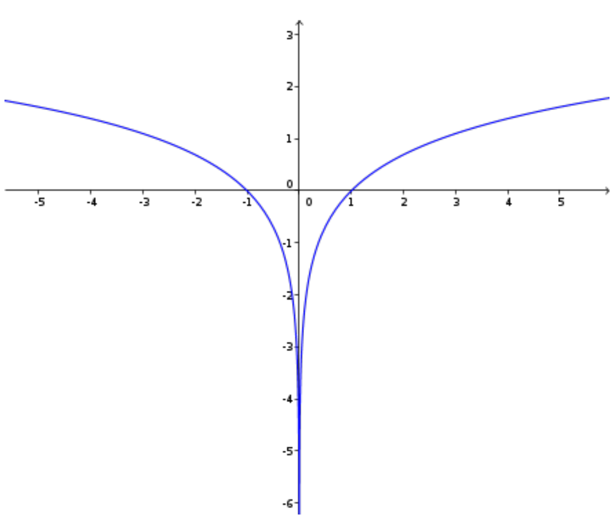

(b)

6. (12 puntos) (a) La siguiente tabla representa a una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b(ax)$, halle $f(18)$.

x	2	6
$f(x)$	1	2

$f(2) = \log_b(2a) = \log_b(2) + \log_b(a) = 1$
$f(6) = \log_b(6a) = \log_b(2) + \log_b(3) + \log_b(a) = 2$
Restando:
$f(6) - f(2) = \log_b(3) = 1$
Por tanto, $f(18) = \log_b(18a) = \log_b(6a) + \log_b(3) = 2 + 1 = 3$

(b) La función $f(x) = \ln|x|$ es muy usada en cálculo, dibuje su gráfica.



7. (12 puntos) (a) Asuma que x, y, z, b, con $b \neq 1$, son números positivos. Use propiedades de logaritmos para escribir en términos de logaritmos de x, y, y z: (i) $\log_b(xyz^2)$, (ii) $\log_b\left(\frac{y\sqrt{z}}{x^3}\right)$.

(i) $\log_b(x) + \log_b(y) + 2\log_b(z)$

(ii) $\log_b(y) + \frac{1}{2}\log_b(z) - 3\log_b(x)$

(b) Asuma que x, y, z, b, con $b \neq 1$, son números positivos. Use propiedades de logaritmos para escribir cada expresión como un solo logaritmo: (i) $3\log_b(x) + \frac{1}{2}\log_b(y)$, (ii) $3\log_b(x+1) - 4\log_b(x-1) + 9\log_b(x)$.

(i) $\log_b\left(x^3\sqrt{y}\right)$

(ii) $\log_b\left((x+1)^3 x^9 (x-1)^{-4}\right)$

8. (12 puntos) (a) Mateo invierte \$4,000 en un CD que paga el 4.75% de interés compuesto trimestralmente. ¿Cuánto tiempo se necesita para que el CD tenga valor de \$10,000?

$10,000 = 4,000(1 + 0.0475/4)^{4t}$. Tomando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad, tenemos que $t = \ln(\frac{5}{2})/4\ln(1 + 0.0475/4) = 19.404$. Por tanto, Mateo necesito 19.404 años para lograr su objetivo.

(b) La función $f(t) = e^t$ se puede expresar en la forma $f(t) = 2^{kt}$. Encuentre el valor de k.

$2^{kt} = e^{\ln 2^{kt}} = e^{k\ln(2)t}$. Por tanto, $k\ln(2) = 1$, es decir, $k = \frac{1}{\ln(2)}$.