

# 3er Examen Parcial, MATE 3171, 2do semestre 2014-2015, SOLUCIONES

Nombre: \_\_\_\_\_ # estudiante: \_\_\_\_\_  
 Profesor: \_\_\_\_\_ # sección: \_\_\_\_\_

Tiene 90 minutos para resolver el examen. Apague su teléfono celular. El uso de calculadora científica (NO gráfica) está permitido. Incluya explicaciones y justificaciones pertinentes con sus respuestas. ¡Buena suerte!

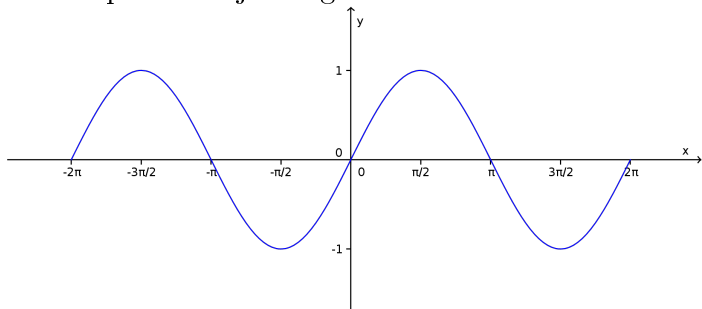
1. (18 puntos) (a) Sea  $f(x) = x^{-2}$ . Para cada una de las siguientes transformaciones, halle la fórmula que corresponde. (i) Reflexión vertical de la gráfica. (ii) Reflexión horizontal de la gráfica. (iii) Desplazamiento de la gráfica 2 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

(i)  $g(x) = -f(x) = -x^{-2}$  (ii)  $g(x) = f(-x) = (-x)^{-2} = x^{-2}$  (iii)  $g(x) = f(x - 1) + 2 = (x - 1)^{-2} + 2$

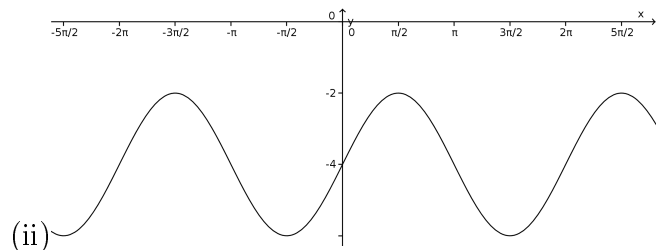
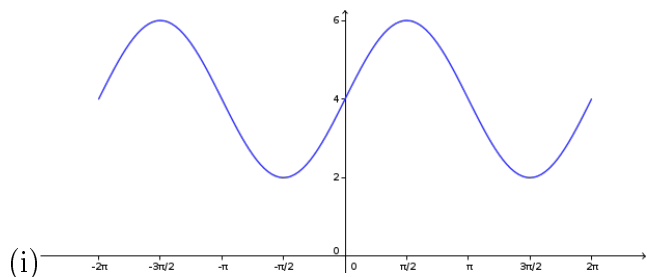
(b) Si  $f(x) = |x|$  exprese cada una de las siguientes como una transformación de  $f$  y establezca cómo su gráfica puede obtenerse a partir de la gráfica de  $f$ . (i)  $|x| + 2$  (ii)  $|x + 2| - 1$

(i) Traslación vertical de dos unidades hacia arriba (ii) Traslación horizontal de dos unidades a la izquierda y traslación vertical de 1 unidad hacia abajo

2. (12 puntos) (a) Use la gráfica de la función  $g$  en el intervalo  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  que se muestra a continuación para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes transformaciones:



(i) Estiramiento vertical por un factor de 2 y luego traslación de la función resultante 2 unidades abajo. (ii) Traslación 2 unidades abajo y luego estiramiento vertical de la función resultante por un factor de 2.



(b) Encuentre una fórmula para cada una de las transformaciones en el problema anterior.

(i)  $2g(x) - 2$  (ii)  $2(g(x) - 2) = 2g(x) - 4$

3. (12 puntos) (a) En cada caso encuentre una fórmula para una parábola que satisfice las condiciones dadas: (i) Vértice en (1,3) y e intercepto- $y$  en (0,2). (ii) Máximo 4 con intercepto- $x$  en (0,0) y (6,0).

(i)  $y = -(x - 1)^2 + 3$  (ii)  $y = \left(\frac{4}{9}\right)x(6 - x)$

(b) Encuentre el valor máximo y mínimo de  $f(x) = x^2 - 8x + 21$  en el intervalo  $[3, 7]$ .

$f(x) = (x - 4)^2 + 5$ . Su valor máximo ocurre lo más lejos del vertice (4,5), es decir en el punto (7,14). El valor máximo en el intervalo es 14.

4. (12 puntos) (a) Si la tabla representa a la función  $f(x) = a \cdot b^x$ , halle  $b$ .

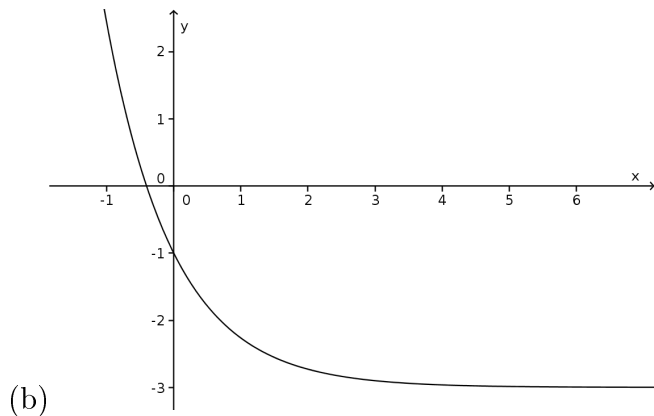
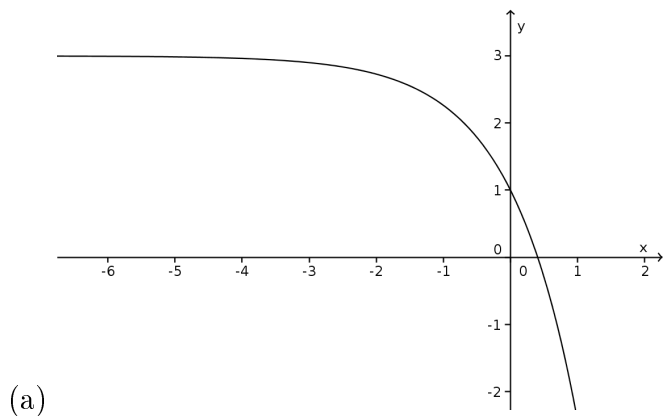
$x$	1	2	3	4
$f(x)$	24	12	6	3

$f(1) = 24 = ab$ ,  $f(2) = 12 = ab^2$ . Por tanto,  $f(2)/f(1) = ab^2/(ab) = b = 12/24 = 1/2$ . Así que  $b = 1/2$ .

(b) Juan ganó la lotería y quiere ahorrar para la educación de su hijo de 7 años de edad. ¿Cuánto debe depositar Juan en un certificado de educación que paga 3.25% de interés anual para que tenga un valor de \$100,000 cuando su hijo tenga 18 años?

Si llamamos  $P$  al principal que depositará Juan, y consideramos que Juan tiene 11 años para lograr el ahorro, tenemos que  $P(1.0325)^{11} = 100,000$ . Por tanto, el principal que Juan debe depositar es  $P = 100,000(1.0325)^{-11} = 70,341.13$

5. (12 puntos) Dibuje la gráfica de las siguientes funciones: (a)  $f(x) = -2e^x + 3$  (b)  $f(x) = 2e^{-x} - 3$



6. (12 puntos) (a) La siguiente tabla representa a una función logarítmica de la forma  $f(x) = \log_b(ax)$ , halle  $f(160)$ .

$x$	10	40
$f(x)$	1	3

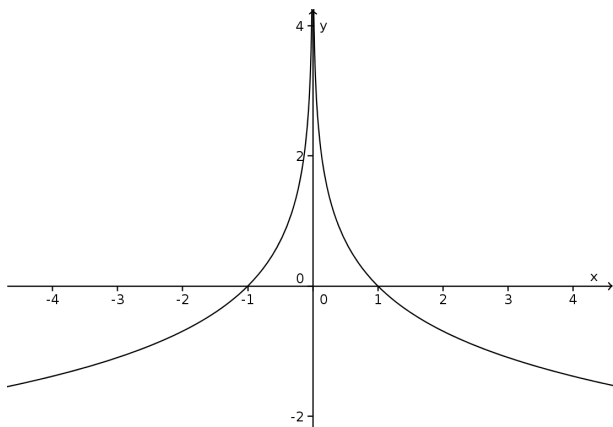
$$f(160) = \log_b(a160) = \log_b(a40) + \log_b(4) = 3 + \log_b(4).$$

Además

$$\log_b(4) = \log_b(a40) - \log_b(a10) = f(40) - f(10) = 3 - 1 = 2.$$

Por tanto,  $f(160) = 3 + 2 = 5$ .

(b) Dibuje la gráfica de la función  $f(x) = -\ln|x|$ .



7. (12 puntos) (a) Asuma que  $x, y, z, b$ , con  $b \neq 1$ , son números positivos. Use propiedades de logaritmos para escribir en términos de logaritmos de  $x, y$ , y  $z$ : (i)  $\log_b(x^2yz^3)$ , (ii)  $\log_b\left(\frac{y^3\sqrt{z}}{x^2}\right)$ .

$$(i) \log_b(x^2yz^3) = 2\log_b(x) + \log_b(y) + 3\log_b(z)$$

$$(ii) \log_b\left(\frac{y^3\sqrt{z}}{x^2}\right) = 3\log_b(y) + \left(\frac{1}{2}\right)\log_b(z) - 2\log_b(x)$$

(b) Asuma que  $x, y, z, b$ , con  $b \neq 1$ , son números positivos. Use propiedades de logaritmos para escribir cada expresión como un solo logaritmo: (i)  $5\log_b(x) + \frac{3}{2}\log_b(y)$ , (ii)  $4\log_b(x+1) - 3\log_b(x-1) + 7\log_b(x)$ .

$$(i) 5\log_b(x) + \frac{3}{2}\log_b(y) = \log_b(x^5y^{3/2})$$

$$(ii) 4\log_b(x+1) - 3\log_b(x-1) + 7\log_b(x) = \log_b\left(\frac{(x+1)^4x^7}{(x-1)^3}\right)$$

8. (12 puntos) (a) Mateo invierte \$3,000 en un CD que paga el 3.75% de interés compuesto bimestralmente. ¿Cuánto tiempo se necesita para que el CD tenga valor de \$10,000?

$3,000(1 + 0.0375/6)^{6t} = 10,000$ . Esto implica  $(1.00625)^{6t} = 10/3$ , lo que implica, tomando logaritmos naturales en ambos lados de la igualdad, que  $t = (1/6)\ln(10/3)/\ln(1.00625) = 32.206$  años.

(b) La función  $f(t) = 2^t$  se puede expresar en la forma  $f(t) = e^{kt}$ . Encuentre el valor de  $k$ .

$f(t) = e^{\ln(2^t)} = e^{\ln(2)t}$ . Por tanto,  $k = \ln(2)$ .