SOLUCIONES

1. Utilice la notación de funciones para expresar cada una de las siguientes funciones con una fórmula.

   a. La función toma cualquier entrada y le asigna la entrada dividida por 2 y le resta 1.

$$f(x)=\frac{x}{2}-1$$

   b. La función toma cualquier entrada negativa le suma 2 y luego busca su raíz cubica.

$$f(x)=\sqrt[3]{x+2},\quad -2<x<0$$

2. Dado que $f(x)=x^2+3x-1$, encuentre $f(1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2.5)$, $f(3)$, $f(x+h)$, $f(x+h)-f(x)$ y $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$f(1)=(1)^2+3(1)-1=3$$

$$f(-2)=(-2)^2+3(-2)-1=-3$$

$$f(0)=(0)^2+3(0)-1=-1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-1=\frac{3}{4}$$

$$f(2.5)=(2.5)^2+3(2.5)-1=12.75$$

$$f(3)=(3)^2+3(3)-1=17$$

$$\begin{aligned}f(x+h)&=(x+h)^2+3(x+h)-1\\&=x^2+2xh+h^2+3x+3h-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=x^2+2xh+h^2+3x+3h-1-\left(x^2+3x-1\right)\\&=2xh+h^2+3h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{2xh+h^2+3h}{h}\\&=2x+h+3\end{aligned}$$

3. Se define una función h con la fórmula $h(x)=\sqrt{x}/(1+x)$. Evalúe cada uno de los siguientes.

a. $h(1/x)=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$

$=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{x+1}{x}}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

b. $h(x+1)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+x+1}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

c. $h(1/(x+1))=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}{1+\frac{1}{x+1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{x+1+1}{x+1}}$

$=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}(x+2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

d. $1/(h(x)+1)=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{x}}{1+x}+1}$

$=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{x}+x+1}{1+x}}$

$=\dfrac{1+x}{1+x+\sqrt{x}}$

e. $2(h(x))$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

f. $h(2x)$

$=\dfrac{\sqrt{2x}}{1+2x}$

g. $h(x+c)$

$=\dfrac{\sqrt{x+c}}{1+x+c}$

h. $h(x+c)-h(x)$

$=\dfrac{\sqrt{x+c}}{1+x+c}-\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

i. $\dfrac{h(x+c)-h(x)}{c}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{x+c}}{1+x+c}-\frac{\sqrt{x}}{1+x}}{c}$

$=\dfrac{c\sqrt{x+c}}{1+x+c}-\dfrac{c\sqrt{x}}{1+x}$

4. Halle el dominio de cada una de las funciones a continuación.

a. $l(x)=\sqrt[3]{1-x}$

El dominio de l es

$\{x|x\ es\ real\}$

b. $m(x)=-\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}x}$

Recordando que la raíz con índice par de un numero negativo no está definida,

$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}x\geq 0$

c. $i(x)=\sqrt{16x^2-9}$

Como el radicando tiene que ser no negativo,

$16x^2-9\geq 0$

$(4x-3)(4x+3)\geq 0$

Haciendo un diagrama de signos se obtiene que el dominio de i es

$x \leq \frac{5}{2}$

El dominio de *m* es

$\left\{ x \middle| x \text{ es real}, x \leq \frac{5}{2} \right\}$

$dom(i) = \left\{ x \middle| x \text{ es real}, x \leq -\frac{3}{4} \text{ o } x \geq \frac{3}{4} \right\}$

d. $f(t) = \frac{5t^2 + 3t - 2}{t^2 - 4}$

Recordando que la división por cero no está definida,

$t^2 - 4 \neq 0$

$(t-2)(t+2) \neq 0$

$t \neq 2, \ t \neq -2$

Entonces el dominio de *f* es

$\left\{ x \middle| x \text{ es real}, x \neq -2, x \neq 2 \right\}$

e. $o(x) = \frac{\sqrt{1+4x}}{2x-1}$

Como el denominador no puede ser cero y el radicando tiene que ser no negativo,

$1 + 4x \geq 0$ y $2x - 1 \neq 0$

$x \geq -\frac{1}{4}$ y $x \neq -\frac{1}{2}$

El dominio de *o* es

$\left\{ x \middle| -\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2} \right\}$

f. $s(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$

Como el denominador no puede ser cero y el radicando no puede ser negativo,

$x^2 - 3x - 10 > 0$

$(x-5)(x+2) > 0$

Haciendo un diagrama de signos se obtiene que el dominio de *s* es

$\left\{ x \middle| x \text{ es real}, x < -2 \text{ o } x > 5 \right\}$

4. Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 + 5x - 3}$

Como el radicando en el numerador debe ser no negativo, esto es, $x \geq 0$ y como el denominador debe ser diferente de cero,

$2x^2 + 5x - 3 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}, \ x \neq -3$

Además el radicando en el numerador debe ser no negativo, esto es, $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Entonces el dominio de *f* es

$\left\{ x \middle| x \text{ es real}, 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ o } x > \frac{1}{2} \right\}$

b. $g(x) = \sqrt{3+2x} + \sqrt{1-4x} - \frac{1}{x-1}$

Como los radicandos deben ser no negativos, y el denominador de la fracción debe ser diferente de cero, $3 + 2x \geq 0$, $1 - 4x \geq 0$ y $x - 1 \neq 0$ entonces,

$x \geq -\frac{3}{2}$, $x \leq \frac{1}{4}$ y $x \neq 1$.

Luego el dominio de *g* es

$\left\{ x \middle| x \text{ es real}, -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{4} \right\}$

5. Si se define $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{2}$, halle el dominio y el rango de *f*

$dom(f) = \left\{ x \middle| x \text{ es real}, x \geq -3 \right\}$

$Rango(f) = \left\{ y \middle| y \text{ es real}, y \geq 0 \right\}$